определен почти касательной структурой объемлющего многообразия. $(2n-1)$-мерные подмногообразия многообразий почти касательной структуры могут состоять из точек двух типов: О и I.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.I. С.133-190.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.5-246.

3. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

4. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. К геометрии многообразий почти касательной структуры // Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения: Сб. материалов Всесоюз. геометр. школы / Черновцы, 1990. С.95-106.

5. Д о м б р о в с к и й Р.Ф., М о ч е р н ю к М.Н. К вопросу интегрируемости почти касательной структуры // Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения: Сб. материалов Всесоюз. геометр. школы / Черновцы, 1990. С.107-113.

6. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

7. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Известия вузов. Математика. 1972. №9. С.54-65.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОСНАЩЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический институт)

В статье изучаются некоторые частные проективно-инвариантные классы m-поверхностей S_m в $(n+1)$-мерном проективном пространстве P_{n+1}, оснащенных полем нормалей P_I. Все результаты данной статьи носят локальный характер, а функции, рассматриваемые в данной статье, предполагаются аналитическими.

1. Рассматривается $(n+1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, отнесенное к проективному реперу $T=\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K,L=\overline{0,n+1})$ деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$dA_J=\omega_J^K A_K, \quad \mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K, \quad \omega_J^J=0. \qquad (1)$$

этом пространстве задается m-поверхность S_m, оснащенная олем нормалей P_I первого рода в смысле А.П.Нордена [1, 197]:

$$P_I\cap L_m=S, \quad P_I\cup L_m=P_{n+1},$$

де $S\in S_m$, L_m-касательная, m-плоскость к S_m в точке S. епер T присоединяем к S_m так, чтобы

$$S=A_0, \quad L_m=(A_0A_1\dots A_m), \quad P_I=(A_0A_{m+1}\dots A_{n+1}). \qquad (2)$$

огда в силу (1) будут иметь место следующие дифференциальые уравнения:

$$\begin{cases}\omega_0^{\hat\alpha}=0, \quad \omega_\alpha^{\hat\alpha}=A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\omega_0^\beta, \quad \nabla A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}+A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\omega_0^0=A_{\alpha\beta\gamma}^{\hat\alpha}\omega_0^\gamma,\\ \omega_{\hat\alpha}^\alpha=A_{\hat\alpha\beta}^\alpha\omega_0^\beta, \quad \nabla A_{\hat\alpha\beta}^\alpha+A_{\hat\alpha\beta}^\alpha\omega_0^0-\delta_\beta^\alpha\omega_{\hat\alpha}^0=A_{\hat\alpha\beta\gamma}^\alpha\omega_0^\gamma,\end{cases} \qquad (3)$$

$$A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta]} = 0, \quad A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta\gamma]} = 0, \quad A^{\alpha}_{\hat\alpha[\beta\gamma]} = 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma = \overline{1,m};\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\sigma = \overline{m+1,n}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\nabla E^{L}_{JK\alpha} = dE^{L}_{JK\alpha} + E^{J}_{JK\alpha}\omega^{L}_{J} - E^{L}_{JK\alpha}\omega^{J}_{J} - E^{L}_{JJ\alpha}\omega^{J}_{K} - E^{L}_{JK\beta}\omega^{\beta}_{\alpha}.$$

2. Рассмотрим на S_m некоторую кривую $k(t)$, проходящу через точку A_0:

$$k(t):\ \omega^{\hat\alpha}_0 = 0, \quad \omega^{\alpha}_0 = t^{\alpha}\theta, \ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta^*, \ \nabla t^{\alpha} + t^{\alpha}\theta = t^{\alpha}_1\theta^*. \qquad (3)$$

Прямую

$$t - (A_0A_\alpha)t^{\alpha} \in L_m, \qquad (4)$$

касательную к $k(t)$ в точке A_0, будем называть направление в L_m. Символом $TY\{t\}$ будем обозначать касательную к лин $Y\{t\}$ в точке Y, соответствующей точке $A_0 \in S_m$ и описываемо точкой Y вдоль (3) или в направлении (4).

Из (1) - (3) следует, что каждой точке $X = x^0A_0 + x^{\hat\alpha}A_{\hat\alpha} \in P$ отвечающей точке $A_0 \in S_m$, соответствует центропроективное преобразование m-плоскости L_m в себя с центром A_0:

$$\Pi(X) = \{x^0\delta^{\beta}_{\alpha} + x^{\hat\alpha}A^{\beta}_{\hat\alpha\alpha}\}, \qquad (5)$$

которое любое направление $V = (A_0A_\alpha)V^{\alpha} \in L_m$ в точке $A_0 \in S_m$ перево в направление

$$W = (A_0A_\beta)W^{\beta} \in L_m, \qquad W^{\beta} = (x^0\delta^{\beta}_{\alpha} + x^{\hat\alpha}A^{\beta}_{\hat\alpha\alpha})V^{\alpha},$$

такое, что

$$W = L_m \cap \{P_I \cup TX\{V\}\}.$$

Заметим, что для точек $X \in \Psi_m$, где Ψ_m -фокусная алгеб ическая поверхность порядка m нормали P_I, определяемая уравнениями

$$\Psi_m:\quad \det[x^0\delta^{\beta}_{\alpha} + x^{\hat\alpha}A^{\beta}_{\hat\alpha\alpha}] = 0, \ x^{\alpha} = 0, \qquad (6)$$

и только для этих точек соответствующие им проективитеты (5) являются вырожденными. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $X \notin \Psi_m$.

3. Рассмотрим с учетом (5) следующие инвариантные геометрические образы в P_I каждой точки A_0, определяемые соответствующими уравнениями.

1°. Линейное $(n-m)$-мерное подпространство

$$\Gamma_{n-m} = \{X \mid \Pi(X) \to W\}:\ mx^0 + A^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha}x^{\hat\alpha} = 0, \ x^{\beta} = 0. \qquad (7)$$

2°. Алгебраические многообразия размерности $n-m$:

$$Q^2_{n-m} = \{X \mid \Pi^2(X) \to W\}: m(x^0)^2 + 2A^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha}x^0x^{\hat\alpha} + A_{\hat\alpha\hat\beta}x^{\hat\alpha}x^{\hat\beta} = 0, \ x^{\beta} = 0; \qquad (8)$$

$$Q^3_{n-m} = \{X \mid \Pi^3(X) \to W\}: \left.\begin{aligned} & m(x^0)^3 + 3(x^0)^2x^{\hat\alpha}A^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha} + 3A_{\hat\alpha\hat\beta}x^0x^{\hat\alpha}x^{\hat\beta} + A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}x^{\hat\alpha}x^{\hat\beta}x^{\hat\gamma} = 0, \\ & x^{\beta} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здесь

$$A_{\hat\alpha\hat\beta} = A^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}A^{\beta}_{\hat\beta\alpha}, \quad A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} = A^{\beta}_{\hat\alpha\gamma}A^{\alpha}_{\hat\beta\beta}A^{\gamma}_{\hat\gamma\alpha}, \qquad (10)$$

причем в (7) - (9) и в дальнейшем $P \to W$ означает, что проективитет P m-плоскости L_m в себя является проективитетом W в смысле [2], т.е. проективитетом с нулевым следом. Из (6) - (10) вытекает

Утверждение 1. Каждое из многообразий Γ_{n-m}, Q^2_{n-m} и Q^3_{n-m} в P_I является линейной, квадратичной и кубичной полярой точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности Ψ_m, соответственно.

4. Проведем в точке $A_0 \in S_m$ с учетом (1) - (3) следующую канонизацию проективного репера T:

$$\left\{\begin{aligned} & A^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow \omega^0_{\hat\alpha} = A^0_{\hat\alpha\beta}\omega^{\beta}_0, \quad A^0_{\hat\alpha\beta} = -\frac{1}{m}A^{\alpha}_{\hat\alpha\alpha\beta}, \\ & \nabla A^0_{\hat\alpha\beta} + 2A^0_{\hat\alpha\beta}\omega^0_0 + A^{\alpha}_{\hat\alpha\beta}\omega^0_{\alpha} = A^0_{\hat\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}_0, \quad A^0_{\hat\alpha[\beta\gamma]} = 0. \end{aligned}\right. \qquad (11)$$

Из (7) следует, что при фиксации (11)

$$P_{I_0} \equiv \Gamma_{n-m} = (A_{m+1} \ldots A_{n+1}) \qquad (12)$$

Это линейное подпространство будем называть нормалью Картана к S_m в точке A_0.

Рассмотрим с учетом (8), (9) и (12) следующие алгебраические многообразия в P_{10}, определяемые соответствующими уравнениями:

$$q^2_{n-m-1} = Q^2_{n-m} \cap P_{10}: \ A_{\hat\alpha\hat\beta} x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta} = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^\alpha = 0; \qquad (13)$$

$$q^3_{n-m-1} = Q^3_{n-m} \cap P_{10}: \ A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta} x^{\hat\gamma} = 0, \ x^0 = 0, \ x^\alpha = 0. \qquad (14)$$

Здесь в силу (3), (11) и (10) симметрические величины $A_{\hat\alpha\hat\beta}$ и $A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla A_{\hat\alpha\hat\beta} + 2A_{\hat\alpha\hat\beta}\omega^0_0 = A_{\hat\alpha\hat\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0, \quad \nabla A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} + 3A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}\omega^0_0 = A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma\gamma}\,\omega^\gamma_0. \qquad (15)$$

Из (15) замечаем, что величины (10) образуют тензоры в смысле Г.Ф.Лаптева [3]. Можно показать, что тензор $A_{\hat\alpha\hat\beta}$ в общем случае является невырожденным: $\alpha \equiv \det[A_{\hat\alpha\hat\beta}] \neq 0$, т.е. квадрика q^2_{n-m-1} в общем случае в каждой точке $A_0 \in S_m$ не вырождается в конус, по крайней мере, с точечной вершиной. Поэтому можно ввести в рассмотрение следующие симметрические величины, удовлетворяющие в силу (15) соответствующим дифференциальным уравнениям

$$A_{\hat\alpha\hat\beta} A^{\hat\beta\hat\gamma} = \delta^{\hat\gamma}_{\hat\alpha} \Rightarrow \nabla A^{\hat\beta\hat\gamma} - 2A^{\hat\beta\hat\gamma}\omega^0_0 = A^{\hat\beta\hat\gamma}_\alpha\,\omega^\alpha_0. \qquad (16)$$

5. Пусть $Y = y^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} \in P_{10}$. Тогда из (14) заключаем, что каждой точке $Y \in P_{10}$, отвечающей точке $A_0 \in S_m$, соответствует квадрика $\tilde q^2_{n-m-1}$ – квадратичная поляра этой точки относительно q^3_{n-m-1}, определяемая уравнениями:

$$\tilde q^2_{n-m-1}: \ A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta} y^{\hat\gamma} = 0, \ x^0 = 0, \ x^\alpha = 0. \qquad (17)$$

Из (17) с учетом (16) заключаем, что каждой точке $Y \in P_{10}$ отвечает проективитет нормали P_{10} в себя:

$$\overset{*}{\Pi}(Y) = \{ A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} A^{\hat\beta\hat\sigma} y^{\hat\alpha} \}, \qquad (18)$$

который каждую точку $Z \in P_{10}$, отвечающую $A_0 \in S_m$, переводит в точку $Z^* \in P_{10}$. Здесь Z – полюс той $(n-m-1)$-плоскости в P_{10} относительно q^2_{n-m-1}, которая полярно сопряжена точке $Z^* \in P_{10}$ относительно $\tilde q^2_{n-m-1}$. Из (18) следует, что каждой точке $A_0 \in S_m$ в нормали P_{10} отвечает $(n-m-1)$-плоскость

$$\Gamma_{n-m-1} = \{ Y \mid \overset{*}{\Pi}(Y) \to W \}: \ B_{\hat\alpha} y^{\hat\alpha} = 0, \ x^0 = 0, \ x^\alpha = 0, \qquad (19)$$

где

$$B_{\hat\alpha} = A^{\hat\beta\hat\gamma} A_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}, \quad \nabla B_{\hat\alpha} + B_{\hat\alpha}\omega^0_0 = B_{\hat\alpha\sigma}\,\omega^\sigma_0 \qquad (20)$$

Из (19) и (13) в силу (16) следует, что каждой точке $A_0 \in S_m$ в P_{10} отвечает точка – полюс Γ_{n-m-1} относительно q^2_{n-m-1}:

$$\Gamma = \Gamma^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}, \quad \Gamma^{\hat\alpha} = B_{\hat\beta} A^{\hat\beta\hat\alpha}, \quad \nabla\Gamma^{\hat\alpha} - \Gamma^{\hat\alpha}\omega^0_0 = \Gamma^{\hat\alpha}_\sigma\,\omega^\sigma_0. \qquad (21)$$

Для упрощения аналитических выкладок и геометрических рассуждений в каждой точке $A_0 \in S_m$ проведем следующую дополнительную к (11) фиксацию проективного репера Γ :

$$B_a = 0, \ B_{n+1} \neq 0; \ \Gamma^a = 0, \ \Gamma^{n+1} \neq 0 \ (a, b, c = \overline{m+1, n}). \qquad (22)$$

Из (19) и (20) в силу (2) получаем

$$\omega^{n+1}_a = A^{n+1}_{a\alpha}\,\omega^\alpha_0, \quad \nabla A^{n+1}_{a\alpha} + A^{n+1}_{a\alpha}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) = A^{n+1}_{a\alpha\beta}\,\omega^\beta_0,$$

$$\omega^a_{n+1} = A^a_{n+1,\alpha}\,\omega^\alpha_0, \quad \nabla A^a_{n+1,\alpha} + A^a_{n+1,\alpha}(\omega^0_0 - \omega^{n+1}_{n+1}) = A^a_{n+1,\alpha\beta}\,\omega^\beta_0 \qquad (23)$$

Из (19) и (21) заключаем, что при фиксации (22)

$$\Gamma = A_{n+1}, \quad \Gamma_{n-m-1} = (A_{m+1} \dots A_n). \qquad (24)$$

Заметим в силу (21), (16) и $\alpha \neq 0$, что $B_{\hat\alpha} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\hat\alpha} = 0$ на S_m. Поэтому при фиксации (22) из рассмотрения исключается случай $B_{\hat\alpha} = 0$ на S_m, когда

$$\overset{*}{\Pi}(Y) \to W, \ \forall Y \in P_{10}.$$

Из (24) и (2) следует, что точке $A_0 \in S_m$ отвечает гиперплоскость

$$\Gamma_n = (A_0 A_1 \dots A_n) = L_m \cup \Gamma_{n-m-1}. \qquad (25)$$

6. Введем следующие обозначения:

1/ $L^{n+1}_m = \bigcup_{t \in L_m} TA_{n+1}\{t\}$ – касательная m-плоскость к m-поверхности S^{n+1}_m, описываемой точкой A_{n+1} вдоль S_m;

2/ $Ch\,\Gamma\{t\}$ – характеристика гиперплоскости Γ_n вдоль на правления t – пересечение Γ_n со своей смежной вдоль t;

3/ $Ch\,\Gamma_n = \bigcap_{t \in L_m} Ch\,\Gamma_n(t)$ – характеристический элемент гиперпло кости Γ_n.

Из (24) и (25) в силу (1) – (3) и (22) получаем, что

$$L^{n+1}_m = (A_{n+1} E_1 E_2 \dots E_m),\quad E_\alpha = A^\beta_{n+1,\alpha} A_\beta + A^a_{n+1,\alpha} A_a, \qquad (26)$$

а подпространства $Ch\,\Gamma_n$ и $Ch\,\Gamma_n\{t\}$ определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} Ch\,\Gamma_n\{t\}:&\ x^\alpha A^{n+1}_{\alpha\beta} t^\beta + x^a A^{n+1}_{a\beta} t^\beta = 0,\ x^{n+1} = 0;\\ Ch\,\Gamma_n:&\ x^\alpha A^{n+1}_{\alpha\beta} + x^a A^{n+1}_{a\beta} = 0,\ x^{n+1} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Рассмотрим следующие оснащенные m-поверхности S_m, определяемые с учетом (1) – (3) и (23) соответствующими соотношениями:

$$S^1_m: L^{n+1}_m \subset P_I \Leftrightarrow A^\alpha_{n+1,\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega^\alpha_{n+1} = 0 \Rightarrow A^0_{n+1[\beta}\delta^\alpha_{\gamma]} + A^\sigma_{n+1[\beta} A^\alpha_{|\sigma|\gamma]} =$$

$$S^2_m: L^{n+1}_m \subset (A_{n+1} \cup L_m) \Leftrightarrow A^a_{n+1,\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega^a_{n+1} = 0 \Rightarrow A^\alpha_{n+1[\sigma} A^a_{|\alpha|\gamma]} = 0; \qquad (2$$

$$S^3_m: \Gamma_{n-m-1} \subset Ch\,\Gamma_n \Leftrightarrow A^{n+1}_{a\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega^{n+1}_a = 0 \Rightarrow A^\sigma_{a[\alpha} A^{n+1}_{|\sigma|\beta]} = 0;$$

$$S^4_m: L_m \subset Ch\,\Gamma_n \Leftrightarrow A^{n+1}_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \omega^{n+1}_\alpha = 0 \Rightarrow A^a_{\alpha[\beta} A^{n+1}_{|a|\gamma]} = 0;$$

$$S^{1234}_m: \omega^\alpha_{n+1} = 0,\ \omega^a_{n+1} = 0,\ \omega^{n+1}_\alpha = 0,\ \omega^{n+1}_a = 0. \qquad (2$$

метим, что система (29) замкнута относительно операции внешго дифференцирования. Поэтому m-поверхность S^{1234}_m, яв ющаяся частным случаем m-поверхностей S^h_m $(h = \overline{1,4})$, сущест ет. Следовательно, каждая из этих m-поверхностей также ществует.

7. Оснащенная m-поверхность S_m в P_{n+1} называется m-верхностью $S_{m,r}$, если S_m является тангенциально-вырожден й m-поверхностью ранга r в смысле [4], т.е. представляет бой r-мерное многообразие $(m-r)$-плоскостей Γ_{m-r}. Аналически m-поверхность $S_{m,r}$ характеризуется соотношением:

$$Rang\,[A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}] = r < m \quad (\forall \hat\alpha = \overline{m+1,n}). \qquad (30)$$

оведем дополнительную к (2) и (22) фиксацию репера:

$$\Gamma_{m-r} = (A_0 A_{r+1} \dots A_m), \qquad (31)$$

куда в силу (30) и (3) получаются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &{}_{\alpha_2\alpha}^{\hat\alpha} = 0,\ \omega^{\hat\alpha}_{\alpha_2} = 0,\ \omega^{\hat\alpha}_{\alpha_1} = A^{\hat\alpha}_{\alpha_1\beta_1}\omega^{\beta_1}_0,\ \omega^{\alpha_1}_{\alpha_2} = A^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha}\omega^\alpha_0, \\ &{}_{\alpha_2\beta_2\beta}^{\hat\alpha} = 0,\ A^{\hat\alpha}_{\alpha_1\beta_1} A^{\beta_1}_{\alpha_2\gamma_1} = -A^{\hat\alpha}_{\alpha_1\alpha_2\gamma_1} \quad (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1 = \overline{1,r};\ \alpha_2,\beta_2 = \overline{r+1,m}). \end{aligned}\right. \qquad (32)$$

ализ дифференциальных уравнений (3), (23) и (32) показывает, о m-поверхность $S_{m,r}$ существует. Это обстоятельство объясется еще и тем, что $S_{m,r}$ является оснащенной тангенциально-рожденной ранга r, которая, как показано в [4], всегда ществует.

Библиографический список

1. Норден А.П. Пространство аффинной связности. М.: ука, 1976. 432 с.

2. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной ометрической интерпретации некоторых образов, определяемых ухвалентными тензорами // Материалы науч. конф. по матем. ех. Томск, 1973. С.50–52.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погружен многообразий // Тр. моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. 275–382.

4. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r